

Singularités et photographies de surfaces

J.P. Dufour et J.P. Tueno

*Getodim URA 1407, Département des Sciences Mathématiques,
Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 34095 Montpellier Cedex 5, France*

Reçu le 1 décembre 1990
(Revisé le 23 octobre 1991)

We study local patterns which appear generically on photographs of lighted surfaces. Using singularity techniques we show that there appear only eight types of pattern. We also study how the geometry of the surface is related to the pattern type.

Keywords: singularity, surface
MSC 1991: 58 C 27

Dans cet article nous décrivons les situations locales qui apparaissent sur les photographies “génériques” de surfaces unicolores. Ce travail s’inscrit dans la lignée d’une série d’articles [1–3] écrits par des spécialistes des singularités et concernant la détermination de la géométrie de surfaces plongées dans l’espace à partir de représentations planes de ces surfaces (de photographies). On notera cependant que dans ces références on utilise surtout le “contour apparent” de la surface (et éventuellement ses ombres); or on lit sur une photographie bien d’autres choses que ces contours apparents (et les ombres), on y voit des dégradés de couleur qui représentent les variations d’intensité de lumière reçue par les parties de la surface. Disant les choses un peu différemment, on peut lire sur les photographies de surfaces la famille des courbes “isophotes” (les courbes le long desquelles l’intensité de la lumière reçue est constante). L’allure des ces familles de courbes isophotes nous donne d’autres renseignements sur la surface. Par exemple on observe “génériquement” des singularités de cette famille sur les courbes de points paraboliques de la surface. (Konderink [4] a déjà remarqué que cela donne un moyen de mettre expérimentalement en évidence les courbes de points paraboliques: lorsque l’on déplace un peu la surface ou la source lumineuse, les singularités en question se déplacent le long des courbes paraboliques.)

Dans ce travail nous décrivons les singularités génériques des familles de courbes isophotes (apparaissant sur une photographie de surface). En fait nous montrons que ce sont les mêmes que pour les familles tout à fait générales de courbes planes (au sens de la réf. [5]), mis à part le fait que dans une photographie, et au voi-

sinage d'un contour apparent, on a des "parties cachées" que l'on n'a pas dans la théorie générale.

1. Le modèle

Dans ce paragraphe nous précisons le modèle mathématique que nous étudions.

On considère une surface S de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 (voir la fig. 1); comme nous ne faisons qu'une étude locale nous supposons que S admet un paramétrage (de classe C^∞)

$$\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (a(u, v), b(u, v), c(u, v)),$$

où U est un ouvert fixé de \mathbb{R}^2 .

On suppose que S est éclairée par une source lumineuse "située à l'infini" de telle façon que les rayons lumineux aient tous la même direction E . On supposera les axes x, y, z choisis pour que $E = (\alpha, 0, \beta)$, $\alpha\beta \neq 0$; on impose aussi $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Cela ne changerait rien aux résultats de faire une hypothèse un peu plus réaliste en supposant que l'on a affaire à une source lumineuse à distance finie ou plusieurs sources; cela ne ferait que compliquer certaines formulations. Ainsi les points de S qui ne sont pas dans l'ombre reçoivent une intensité de lumière variable que l'on supposera proportionnelle au cosinus de l'angle de E avec le vecteur normal unitaire N à S en ces points. On considère alors la famille des "courbes isophotes de la surface", c'est par définition, la famille des courbes $g = \text{constante}$ avec $g = N \cdot E$. Certaines des courbes isophotes de la surface (ou certaines parties de ces courbes) restent très "théoriques", lorsqu'elles sont dans des zones d'ombre.

Lorsque l'on photographie la surface éclairée S on a une submersion (locale) $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui à tout point de \mathbb{R}^3 (ou d'une partie de \mathbb{R}^3) associe un point de \mathbb{R}^2 (la plaque photographique); c'est le passage à travers l'objectif. Une photographie en noir et blanc de S est alors formée des points image par V des points de S

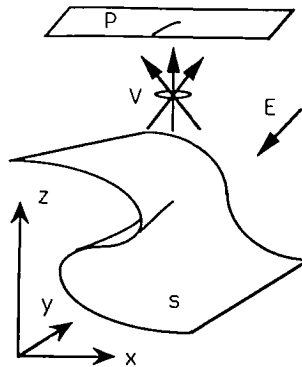


Fig. 1.

“non cachés”, la densité de gris en un tel point étant proportionnelle à l’intensité de lumière au point correspondant de S . Ainsi on lit sur la photographie la famille de “courbes isophotes” (de la photographie), celle formée par les images par V des courbes isophotes de la surface. En réalité on ne voit qu’une partie de ces courbes: celle qui correspond aux courbes que ne sont ni dans des “parties cachées” ni dans des zones d’ombre.

Dans ce qui suit on suposera que V est simplement la projection $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Cela ne changerait rien aux résultats de prendre un V un peu plus “réaliste”.

Pour nous résumer: La surface est donnée par son paramétrage (C^∞)

$$\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (a(u, v), b(u, v), c(u, v)) .$$

La famille de courbes isophotes est la famille des courbes

$$\eta(g^{-1}(C)), \quad C \in \mathbb{R},$$

avec

$$\eta : U \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto (a(u, v), b(u, v)) ,$$

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto N(u, v) \cdot (\alpha, 0, \beta) ,$$

$N(u, v)$ étant le vecteur normal unitaire à la surface au point $\gamma(u, v)$ ($\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\alpha\beta \neq 0$).

2. Rappel concernant les familles de courbes planes

Conformément à la réf. [6] une famille (différentiable) de courbes planes est la donnée d’un couple d’application de classe $C^\infty(\eta, g)$,

$$\eta : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g : U \rightarrow \mathbb{R},$$

où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Les “courbes” sont les $\eta(g^{-1}(C))$, $C \in \mathbb{R}$.

Pour une telle famille on distingue six types de comportements au voisinage de $(u, v) \in U$:

type 1: η et g régulières en (u, v) ,

type 2: η régulière et g de Morse en (u, v) ,

type 3: η admet un pli en (u, v) ; $(\eta, g) : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ est régulière et g est régulière en restriction à la ligne de pli de η en (u, v) ,

type 4: η admet un pli en (u, v) ; (η, g) est régulière et g est de Morse en restriction à la ligne de pli en (u, v) ,

type 5: η admet un pli en (u, v) ; (η, g) présente en (u, v) une singularité “parapluie de Whitney” avec une ligne de points doubles transverse à la “direction” $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ dans \mathbb{R}^3 ,

type 6: η admet une fronce en (u, v) avec (η, g) régulière.

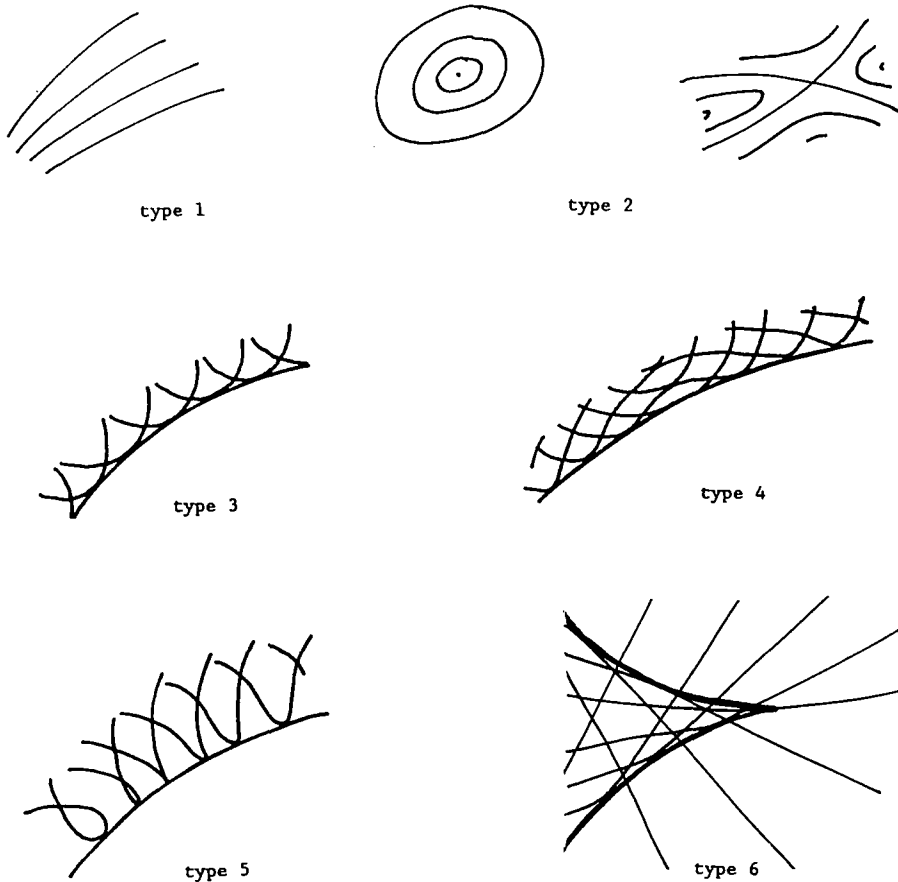


Fig. 2.

Dans la réf. [5] on montre que la propriété d'être de l'un des types 1, 2, ..., 6 en tout point (u, v) est *générique* pour les couples (η, g) . La fig. 2 donne l'allure des courbes de la famille pour chacun des six types. On a aussi des modèles locaux à difféomorphisme près de U ainsi que des buts de η et g .

3. Le théorème principal

Théorème. *Pour les surfaces paramétrées $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^3((u, v) \mapsto (a(u, v), b(u, v), c(u, v)))$ la propriété suivante est générique: en tout point $(u, v) \in U$ le couple (η, g) est de l'un des types 1, 2, ..., 6 du paragraphe 2 où $\eta : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ est donnée par $\eta(u, v) = (a(u, v), b(u, v))$ et $g(u, v) = N(u, v) \cdot E$ (comme dans le paragraphe 1).*

Idée de la démonstration. La démonstration détaillée de ce théorème figure dans la réf. [7]. Les techniques sont classiques; on y montre que le fait que (η, g) soit de l'un des types 1, 2, ..., 6 en chaque point revient à supposer que le jet d'ordre 4 de γ en chaque point évite un certain nombre de sous-variétés \mathcal{F}_i de codimensions strictement supérieures à 2 dans l'espace des quatre jets de U dans \mathbb{R}^3 . Essentiellement ces sous-variétés \mathcal{F}_i sont les images réciproques par l'application $\gamma \mapsto (\eta, g)$ (lorsque l'on passe aux jets) des sous-variétés Σ_i que doit éviter le trois-jet d'une famille de courbes générale (η, g) pour être en chaque point de l'un des types 1 à 6 (voir la réf. [5]). Pour montrer que les \mathcal{F}_i sont des sous-variétés (et calculer leurs codimensions) l'outil essentiel est le résultat de Wan [8] qui dit que, à difféomorphisme de la *source* près, les formes normales des plis et fronces sont respectivement

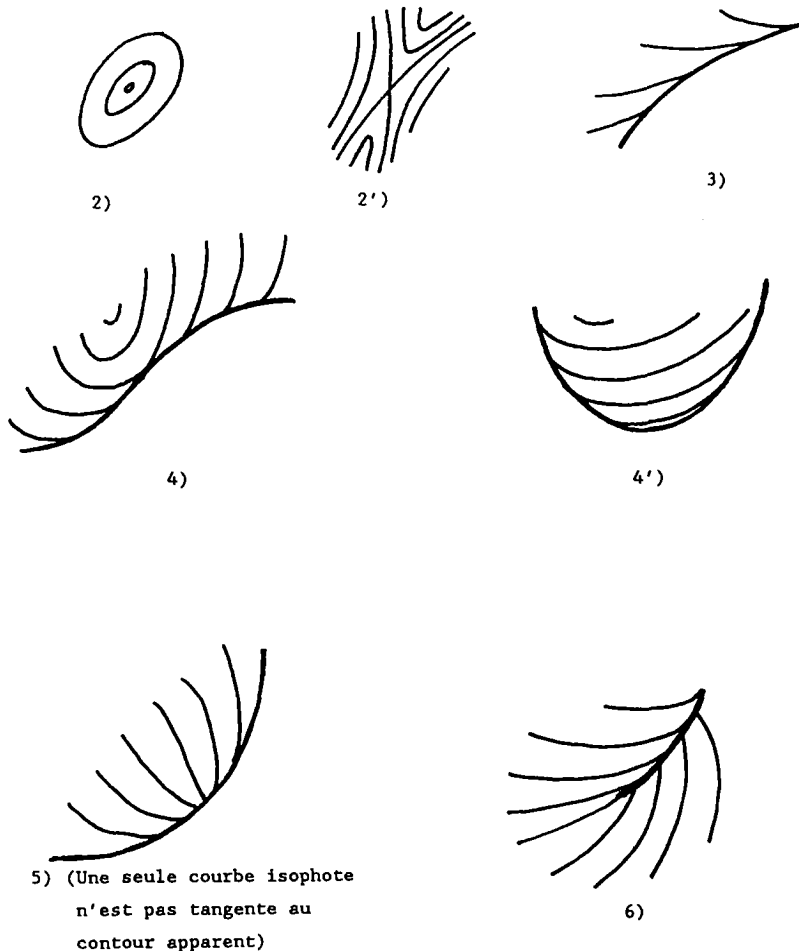


Fig. 3. Allure locale générique des photographies.

$$(x, y) \mapsto (x, \pm y^2 + \lambda(x)) \quad \text{ou} \quad (x, y) \mapsto (\pm y^2 + \lambda(x), x),$$

$$(x, y) \mapsto (x, y^3 + yp(x) + \lambda(x)) \quad \text{ou} \quad (x, y) \mapsto (y^3 + yp(x) + \lambda(x), x).$$

Il faut noter que notre théorème n'est pas, à priori, un corollaire évident du résultat concernant les familles de courbes générales car, ici, g dépend de η .

Ce théorème permet de donner l'allure générique des photographies de surfaces (unicolors): l'allure des courbes isophotes (théoriques) est de l'un des types de la fig. 2, génériquement les bords de zones d'ombre évitent les points de type 2, 4, 5 et 6 (pour des raisons évidentes de codimension); en un pli l'un des deux bords du pli est une partie cachée; en une fronce seule une "partie" est visible et cache deux autres "parties"; ainsi on obtient les allures génériques représentées sur la fig. 3.

Pour être complet il nous faut rajouter les "superpositions" génériques de telles situations locales (vue simultanée de plusieurs parties de S), il y a le type 1 conjugué avec l'un des types 3, 4 ou 5, superposition de deux types 3 (avec éventuellement un type 1). Nous donnons quelques exemples de ces derniers cas dans la fig. 4.

Remarque. Dans les familles de courbes planes générales il apparaît des "modules" pour la classification générique, autant pour la classification à difféomorphisme près que pour celle à homéomorphisme près [9]. Cela est dû à l'apparition de "tissus" (superpositions de feuilletages). Ici on n'a pas de tels modules si l'on étudie les photographies à difféomorphisme près (cela serait bien sûr tout différent si l'on travaillait à isométrie près).

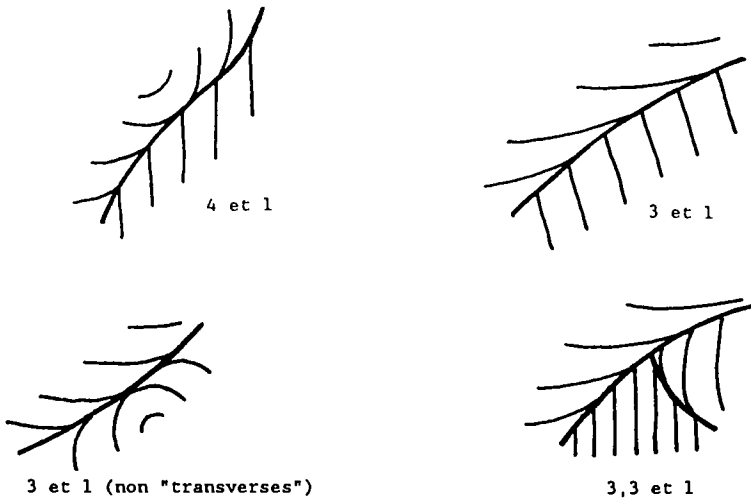


Fig. 4.

4. Modèles et géométrie de la surface

Nous rappelons d'abord le résultat de Thom et Kergosien [10] qui dit que pour une surface telle que nous l'étudions les points paraboliques s'organisent génériquement en courbes plongées deux à deux disjointes (en fait ce sont les points "pli" et "fronce" de l'application de Gauss). Améliorant un peu ces résultats on peut même montrer que, génériquement, ces courbes de points paraboliques rencontrent transversalement les courbes de plis de la projection sur le plan xOy (η dans les notations du paragraphe 1). Nous nous plaçons donc dans ce cas.

4.1. HORS DU CONTOUR APPARENT

Dans ce cas on étudie ce qui se passe au voisinage d'un point où η est régulière. On peut supposer alors que le paramétrage de la surface est du type

$$\gamma : (u, v) \mapsto (u, v, c(u, v)) .$$

La fonction g s'exprime de manière relativement simple en fonction de c et des calculs élémentaires prouvent qu'il y a deux types de points critiques de g .

(i) Les point où la surface est normale à la direction de l'éclairage; ce sont forcément des maxima de g et ils n'apparaissent génériquement que pour des points non paraboliques (elliptiques ou hyperboliques).

(ii) Les points paraboliques de la surface où g est localement extrémal; lorsque l'on étudie g en restriction aux courbes paraboliques il passe (génériquement) par des extréma: en ces points on observe un point de type Morse pour g et donc une "photographie" locale des types 2 (fig. 3).

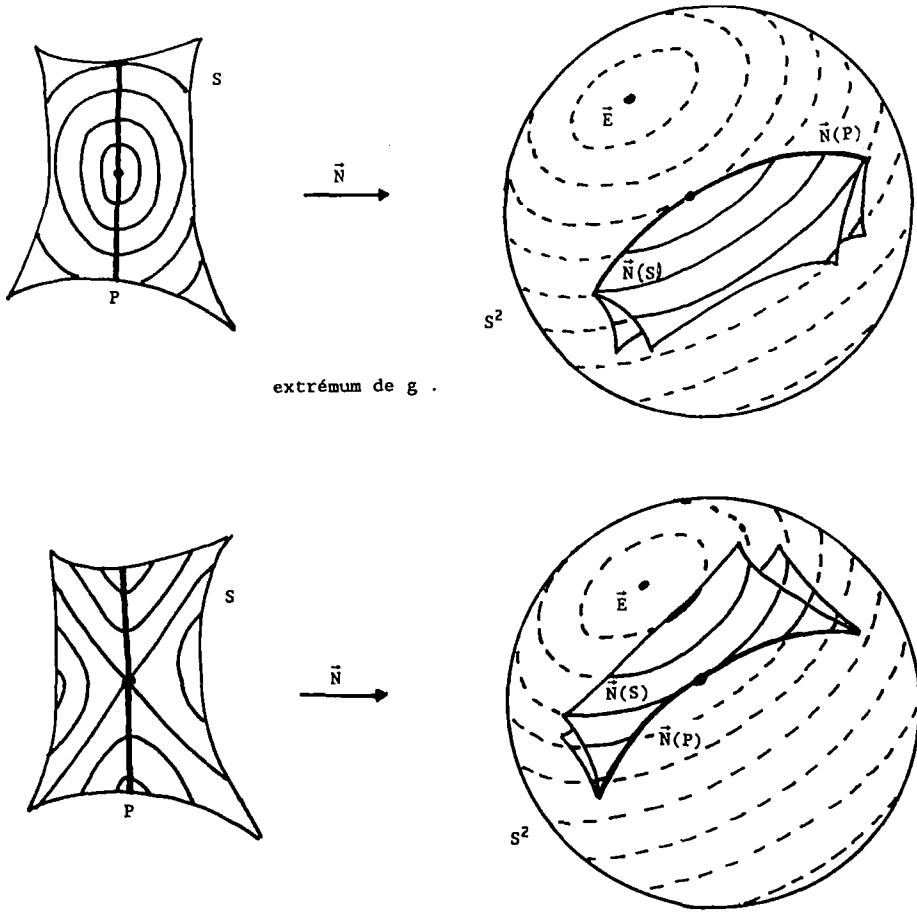
L'explication géométrique du phénomène (ii) se lit sur la fig. 5. Sur cette figure on a représenté l'application de Gauss $N : S \rightarrow S^2$ et on suppose qu'elle a un pli P le long de la verticale (P est une ligne de points paraboliques). La fonction g est la composée de N et de $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(\nu) = \nu \cdot E$; alors les courbes isophotes de S sont les pré-images par N des courbes $h = \text{constante}$ qui sont les cercles de S^2 d'axe E . Le point critique de g correspond au point où l'image, $N(P)$, de la ligne de pli est tangent à l'un de ces cercles; suivant le "côté" de $N(P)$ où est l'image du pli on observe un extremum ou un col pour g . Des calculs élémentaires montrent que l'on a génériquement affaire à une singularité non-dégénérée.

Comme il est dit dans notre introduction, ces singularités de type (ii) permettent de mettre expérimentalement en évidence les lignes de points paraboliques.

4.2. EN UN POINT DU CONTOUR APPARENT DE TYPE PLI

On étudie ce qui se passe au voisinage d'un point où η admet un pli. Pour cela on utilise les paramétrages déjà cités; on peut supposer que l'on a soit

$$\gamma : (u, v) \mapsto (u, \lambda(u) \pm v^2, c(u, v)) , \tag{1}$$



extrémum de g .

Fig. 5.

si le pli est transverse à l'axe des y , soit

$$\gamma : (u, v) \mapsto (\mu(u) \pm v^2, u, c(u, v)) , \tag{2}$$

avec $\mu'(0)=0$, sinon (λ et c nuls à l'origine).

Dans tous les cas la ligne de pli à la source est $v=0$; on rappelle (voir la réf. [5]) qu'alors (η, g) admet en 0 une singularité:

- de type 3 (paragraphe 2) si et seulement si

$$g_v(0) \times g_u(0) \neq 0$$

(g_u désigne la dérivée partielle de g par rapport à u , etc.);

- de type 4 si et seulement si

$$g_v(0)g_{u^2}(0) \neq 0 = g_u(0) ;$$

– de type 5 si et seulement si

$$g_{uv}(0) \times (-\frac{1}{3}g_{v^3}g_u + g_{uv}g_{v^2})(0) \neq 0 = g_v(0) .$$

Un calcul élémentaire prouve que dans le cas (1) on a

$$\begin{aligned} g_u(0) = 0 &\Leftrightarrow \lambda''(0) = 0 , \\ g_v(0) = 0 &\Leftrightarrow \alpha c_u(0) - \beta(1 + (\lambda'(0))^2) = 0 , \end{aligned}$$

et dans le cas (2) on a toujours

$$g_u(0) = 0 \neq g_v(0) .$$

On remarque que, dans le cas (1), $u \mapsto (u, \lambda(u))$ paramètre la projection de la ligne de pli (le “contour apparent”); ainsi la nullité de $g_u(0)$ signifie que ce contour apparent admet un point d’inflexion à l’origine. Toujours dans le cas (1) on voit que la ligne de pli de S est la courbe $u \mapsto (u, \lambda(u), c(u, 0))$; ainsi le vecteur tangent à cette ligne de pli à l’origine est

$$T = (1, \lambda'(0), c_u(0)) .$$

La condition $g_v(0) = 0$ se réécrit alors

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda'(0))^2}} \frac{c_u(0)}{\sqrt{1 + (\lambda'(0))^2}} = \frac{\beta}{\alpha} ;$$

notons θ l’angle du plan vertical contenant T avec l’axe des x et φ l’angle de T avec le plan xOy [$(\theta, \varphi, \|T\|)$ sont les coordonnées “sphériques” habituelles de T]; alors on peut récrire la condition $g_v(0) = 0$ sous la forme

$$\cos \theta \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \epsilon , \tag{3}$$

où ϵ est l’angle de la direction de l’éclairage avec le plan xOy .

Ainsi on peut résumer la situation en présence d’un contour apparent (type pli) comme suit. On a quatre cas:

(i) le contour apparent n’est pas orthogonal à la projection de la direction de l’éclairage (axe des x), il ne présente pas d’inflexion et la condition (3) n’est pas vérifiée; alors on a affaire (génériquement) à une photographie de type 3 (cf. le paragraphe 3) et le point correspondant de la surface n’est pas un point parabolique;

(ii) le contour apparent n’est pas orthogonal à la projection de la direction d’éclairage, il ne présente pas d’inflexion et la condition (3) est vérifiée; alors on a une photographie de type 5 et le point correspondant de la surface n’est pas parabolique;

(iii) le contour apparent n’est pas orthogonal à la projection de la direction d’éclairage et il admet un point d’inflexion; alors on a une photographie de type 4 et le point correspondant de la surface est parabolique;

(iv) le contour apparent est orthogonal à la projection de la direction d’éclairage;

rage; alors on a une photographie de type 4 et le point correspondant de la surface n'est pas parabolique.

4.3. EN UN POINT DU CONTOUR APPARENT DE TYPE FRONCE (POINT D'ARRÊT)

Utilisant la forme normale déjà vue on voit que l'on a forcément affaire à un point hyperbolique de la surface et que le contour apparent n'est pas orthogonal à la projection de la direction d'éclairage en ce point.

Références

- [1] J.W. Bruce, Seeing – the mathematical viewpoint, *Math. Intelligencer* 6 (1984) 18–25.
- [2] P. Giblin et R. Weiss, Reconstruction of surfaces from profiles, preprint, Liverpool.
- [3] Y.L. Kergosien, La famille des projections orthogonales d'une surface et ses singularités, *C.R. Acad. Sci. Paris* 292 (1981) 929–932.
- [4] J.J. Konderink et A.J. van Dorn, The singularities of the visual mapping, *Biol. Cybern.* 24 (1976) 51–59.
- [5] J.P. Dufour, Familles de courbes différentiables, *Topology* 22 (1983) 449–474.
- [6] V.I. Arnol'd, Wave front evolution and equivariant Morse lemma, *Commun. Pure Appl. Math.* 29 (1976) 557–582.
- [7] J.P. Tueno, Détermination locale des surfaces à partir de leur représentation locale plane, ou théorie des singularités de photographies de surfaces éclairées, Thèse Univ. de Montpellier (1989).
- [8] Wan, Morse theory for two functions, *Topology* 14 (1975) 218–228.
- [9] J.P. Dufour, Modules pour les familles de courbes planes, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 39 (1989) 225–238.
- [10] R. Thom et Y.L. Kergosien, Sur les points paraboliques des surfaces, *C.R. Acad. Sci. Paris* 290 (1980) 705–710.